7/12/17 Μαθημα 9ο

Μεθοδοι ελαχιστοποιησης

$Ax=b$ Θεωρουμε ενα συναρτησιακό $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ τ.ω. η f να ελαχιστοποιείται στη λυση του συστηματος.

Θεωρουμε $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ αυθαιρετο και παράγουμε την ακολουθια $(x^{(k)})_{k=0}^{\infty}$: $x^{(k+1)} = x^{(k)} + a_k u^{(k)}$, ωστε να συγκλίνει στο σημείο που ελαχιστοποιεί την f

$x^{(k)} \longrightarrow u^{(k)} \dashrightarrow a_k u^{(k)}$ θελω που ελαχιστοποιειται

$f(x+au) = g(\alpha)$ και θελω να ελαχιστοποιειται θα δω τι πρεπει να επιλέξω για α και u.

$g(0) = f(x)$

Παιρνω αναπτυγμα Taylor

$g(\alpha) = g(0) + a g'(0) + O(a^2)$ το α^2 αμελητεο παει κοντά στο 0 για αυτο την ονομάζω $O(\alpha^2)$ συναρτηση που κανει 0.

$= f(x) + a \sum_{i=1} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{d(x_i + a u_i)}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0} + O(\alpha^2) =$

$= f(x) + a \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{x_i} u_i + O(\alpha^2) =$

$= f(x) + \alpha(\nabla f, u) + O(\alpha^2)$

∇: αναδελτα, διανυσμα των μερικων παραγωγων

Θεωρουμε $a>0$, πρεπει $(\nabla f, u) < 0$ και οσο το δυνατό πιο μικρό. Γινεται το μικρότερο δυνατο οταν $(\widehat{\nabla f, u}) = \pi$

Αφου $\cos(\widehat{\nabla f, u}) = \frac{(\nabla f, u)}{\|\nabla f\| \cdot \|u\|}$

επομένως επιλέγουμε ως $u = -\nabla f$

Μέθοδος Απότομης Καθόδου

Η $f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - x^T b$, A συμμετρικός και θετικά ορισμένος

$$f(x) = \frac{1}{2}(x, Ax) - (x, b)$$

Έστω x η λύση του συστήματος $Ax = b$.

$$f(x+y) = \frac{1}{2}(x+y, A(x+y)) - (x+y, b) =$$

$$= \frac{1}{2}(x, Ax) + \frac{1}{2}\overbrace{(x, Ay)}^{=(Ax,y)=(y,Ax)} + \frac{1}{2}(y, Ax) +$$

$$+ \frac{1}{2}(y, Ay) - (x, b) - (y, b) =$$

$$= f(x) + (y, Ax) + \frac{1}{2}(y, Ay) - (y, b)$$

$$= f(x) + \frac{1}{2}(y, Ay) > f(x), \quad y \neq 0$$

άρα έχει ελάχιστο

$\nabla f = 0$ όπου $\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}$, $\frac{\partial f}{\partial x_k} = ;$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{i=1}^{n} x_i b_i =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j + \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ik} - b_k =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j - b_k = (Ax)_k \quad , \quad \nabla f = \begin{bmatrix} (Ax)_1 \\ (Ax)_2 \\ \vdots \\ (Ax)_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} =$$

$$= Ax - b.$$

$-\nabla f = b - Ax = r$ Διάνυσμα υπόλοιπο.

Εσιανός πίνακας είναι ο A συμμ. κ. Θ.Ο.

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + a_k(-\nabla f(x^{(k)})) = x^{(k)} + a_k r^{(k)} \quad , \quad r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + a r^{(k)}$$

$$f(x^{(k+1)}) = f(x^{(k)} + a r^{(k)}) = \frac{1}{2}\left(x^{(k)} + a r^{(k)}, A(x^{(k)} + a r^{(k)})\right) - (x^{(k)} + a r^{(k)}, b)$$

$$= f(x^{(k)}) + \frac{1}{2} a (r^{(k)}, Ax^{(k)}) + \frac{1}{2} a (x^{(k)}, Ar^{(k)}) +$$

$$+ \frac{1}{2} a^2 (r^{(k)}, Ar^{(k)}) - a(r^{(k)}, b) =$$

$$= f(x^{(k)}) + a(r^{(k)}, Ax^{(k)}) + \frac{1}{2} a^2 (r^{(k)}, Ar^{(k)}) - a(r^{(k)}, b)$$

$$= f(x) - a(r^{(k)}, r^{(k)}) + \frac{1}{2} a^2 (r^{(k)}, Ar^{(k)}).$$

Θέλω να προσδιορίσω το a έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται η ποσότητα αυτή.

Το τριώνυμο ελαχιστοποιείται στην τιμή a_k (k επανάληψη)

$$a_{k+1} = \frac{(r^{(k)}, r^{(k)})}{(r^{(k)}, Ar^{(k)})} \quad , \quad x^{(k+1)} = x^{(k)} + a_{k+1} r^{(k)}$$

Μορφή ψευδοκώδικα της απότομης καθόδου

Αλγόριθμος Απότομης καθόδου

Δεδομένα: $A, b, \varepsilon > 0$ (= επιθυμητή ακρίβεια)

$x^{(0)} = 0, \quad r^{(0)} = b$

$k = 0$

Εφόσον $\|r^{(k)}\| > \varepsilon$

$$k = k+1$$

$$a_k = \frac{(r^{(k-1)}, r^{(k-1)})}{(r^{(k-1)}, A r^{(k-1)})}$$

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} + a_k r^{(k-1)}$$

$$r^{(k)} = b - A x^{(k)} \quad \text{ή} \quad \overbrace{r^{(k)} = r^{(k-1)} - a_k A r^{(k-1)}}^{\text{έτσι κάνω οικονομία}}$$

Τέλος Εφόσον

Αποτέλεσμα: $x^{(k)}$ η προσέγγιση της λύσης

$O(mn^2)$: m αριθμός επαναλήψεων

$$r^{(k)} = b - A x^{(k)} = b - A(x^{(k-1)} + a_k r^{(k-1)}) = r^{(k-1)} - a_k A r^{(k-1)}$$

Ασκηση

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x^{(0)} = 0, \quad r^{(0)} = b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Ar^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = \frac{(r^{(0)}, r^{(0)})}{(r^{(0)}, Ar^{(0)})} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$x^{(1)} = x^{(0)} + a_1 r^{(0)} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$r^{(1)} = r^{(0)} - \frac{1}{2} Ar^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Ar^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \frac{1}{2}$$

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$r^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$Ar^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}$$

$$x^{(3)} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 \\ 1/2 \\ 3/4 \end{bmatrix}$$

Αλγοριθμος συζυγών κλίσεων

Δεδομενα : $A, b, \varepsilon > 0$

$x^{(0)} = 0, \quad r^{(0)} = b, \quad p^{(1)} = b$

$$a_1 = \frac{(r^{(0)}, r^{(0)})}{(Ap^{(1)}, p^{(1)})}, \quad x^{(1)} = x^{(0)} + a_1 p^{(1)},$$

$r^{(1)} = b - Ax^{(1)} \quad (r^{(1)} = r^{(0)} - a_1 A p^{(1)}), \quad k = 1$

Εφοσον $\| r^{(k)} \| > \varepsilon$

$k = k+1$

$$b_k = \frac{(r^{(k-1)}, r^{(k-1)})}{(r^{(k-2)}, r^{(k-2)})}$$

$$p^{(k)} = r^{(k-1)} + b_k p^{(k-1)}$$

$$a_k = \frac{(r^{(k-1)}, r^{(k-1)})}{(Ap^{(k)}, p^{(k)})}$$

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} + a_k p^{(k)}$$

$$r^{(k)} = b - Ax^{(k)} \quad (r^{(k)} = r^{(k-1)} - a_k A p^{(k)})$$

Τελος εφοσον

Η συζυγών κλίσεων βρίσκει ακριβώς την λύση σε n επαναλήψεις.